Séries numériques !

$\sum_{n\geq 0} U_n$

- $\lim U_n \neq 0 \Longrightarrow \sum U_n$ diverge.
- $\lim U_n = 0$
  - Si $U_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$
    - **Le critère de Comparaison :**

      Si $0 \leq U_n \leq V_n \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } \sum V_n \text{ CV} \Rightarrow \sum U_n \text{ CV} \\ \text{si } \sum U_n \text{ div} \Rightarrow \sum V_n \text{ div} \end{cases}$

    - **Le Critère d'équivalence :**

      Si $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n \Longrightarrow \sum U_n$ et $\sum V_n$ ont même nature.

    - **Le critère d'integrale :**

      Si $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

      $\begin{cases} - f \text{ continue} \\ - f \geq 0, f \searrow \\ - f \text{ derivable} \end{cases}$ alors : $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\, dt$ CV $\Longleftrightarrow \sum_{n \geq n_0} f(n)$ CV

      Exp : $\begin{cases} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1 \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

    - **Le critère de Cauchy :**

      $\lim_{+\infty} \sqrt[n]{U_n} = l \begin{cases} \text{si } l < 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ CV} \\ \text{si } l > 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ div} \\ \text{si } l = 1 \Rightarrow \text{On ne peut rien dire} \end{cases}$

    - **Le critère d'Alenbert :**

      si de plus $U_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

      $\lim_{+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \begin{cases} l > 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ div} \\ l < 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ CV} \\ l = 1 : \text{On ne peut rien dire.} \end{cases}$

  - Si U_n n'est pas à termes positive
    - Si $\sum |U_n|$ CV $\left(\sum U_n \text{ absolument CV} \Rightarrow \sum U_n \text{ CV} \right)$
    - Si $\sum U_n$ alternés $((U_{n+1} \cdot U_n) \leq 0)$ (Critère de Leibenz $\left.\begin{matrix} - |U_n| \leq |U_{n+1}| \\ - \lim U_n = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum U_n$ CV

      $\Rightarrow |U_n \cdot U_n| < |U_{n+1}|$